Vũ Hồng Phong GVTHPT Tiên Du 1,Tiên Du, Bắc Ninh (21-4-2016)

# KĨ THUẬT "ĐÁNH CẢ CỤM" KHI DÙNG CASIO

# GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

**(dành cho bạn đọc muốn thử sức với một số PT vô tỉ phức tạp phải dùng máy tính Casio trợ giúp**

**và thử sức giải phương trình bậc 3)**

**Bài viết này xin được giới thiệu các phương trình dùng máy tính cầm tay tìm biểu thức liên hợp có dạng** $ax^2+bx+c-\sqrt[k]{P(x)}$ **,với a,b,c là các số nguyên**

**Sau đây là các thí dụ đơn giản của dạng này**

**(phương pháp tìm biểu thức nêu ở 2 chuyên đề ở phần sau các thí dụ)**

**Thí dụ 1 Giải phương trình**

$$\sqrt{5x^2+10x+7}+\sqrt{-12x^3-2x+12}=4x^2+3x+5$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2+3x+2-\sqrt{5x^2+10x+7}$ **và** $2x^2+3-\sqrt{-12x^3-2x+12}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

**Thí dụ 2 Giải phương trình**

$$\sqrt{3x^2-7x+7}+\sqrt{8x^3-x^2-3x+7}=4x^2-2x+2$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2-2x+1-\sqrt{3x^2-7x+7}$ **và** $2x^2+1-\sqrt{8x^3-x^2-2x+7}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4}$

**Thí dụ 3 Giải phương trình**

$$\sqrt{18x^2+5x-5}+\sqrt{64x^2+16x-23}=6x^2+3x+2$$

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2+x+1-\sqrt{18x^2+5x-5}$ **và** $4x^2+2x+1-\sqrt{64x^2+16x-23}$

**PTcó 4 nghiệm** $x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4}$; $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{4}$

**Thí dụ 4 Giải phọong trình**

$\sqrt{14x^2+11x+6}+\sqrt{32x^2+32x+9}=6x^2+3x+3$

**Họớng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2+x+2-\sqrt{14x^2+11x+6}$ **và** $4x^2+2x+1-\sqrt{32x^2+32x+9}$

**PTcó 4 nghiệm** $x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4}$; $x=-1; x=\dfrac{-1}{2}$

**Thí dụ 5 Giải phọong trình**

$\sqrt{8x^2+10x+5}+\sqrt{24x^2+36x+17}=6x^2+3x+2$

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2+x+1-\sqrt{8x^2+10x+5}$ **và** $4x^2+2x+1-\sqrt{24x^2+36x+17}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4}$

**Thí dụ 6 Giải phọong trình**

$\sqrt{8x^2+10x+5}+\sqrt{(x+1)(8x^2+21x+17)}=6x^2+4x+2$

**Họớng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2+x+1-\sqrt{8x^2+10x+5}$ **và** $4x^2+3x+1-\sqrt{(x+1)(8x^2+21x+17)}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4}$

**Thí dụ 7 Giải phọong trình**

$\sqrt{8x^2+10x+5}+\sqrt{8x^3+37x^2+44x+20}=6x^2+4x+3$

**Họớng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2+x+1-\sqrt{8x^2+10x+5}$

**và** $4x^2+3x+2-\sqrt{8x^3+37x^2+44x+20}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4}$

**Thí dụ 8 Giải phơıong trình**

$$\frac{(3x+1)\sqrt{2x-1}+\sqrt{14x^3-2x^2-6x-2}}{4x^2+x+1}=1$$

**Hơńg dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2+x+1-(3x+1)\sqrt{2x-1}$ **và** $2x^2-\sqrt{14x^3-2x^2-6x-2}$

PT đã cho có 2 nghiệm: $x=1$; $x=\dfrac{5+\sqrt[3]{359-12\sqrt{78}}+\sqrt[3]{359+12\sqrt{78}}}{6}$

**Thí dụ 9 Giải phơıong trình**

$$\frac{(3x+1)\sqrt{2x-1}+\sqrt{14x^3-2x^2-6x-2}}{4x^2+x+1}=1$$

**Hơńg dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2+x+1-(3x+1)\sqrt{2x-1}$ **và** $2x^2-\sqrt{14x^3-2x^2-6x-2}$

PT đã cho có 2 nghiệm: $x=1$; $x=\dfrac{5+\sqrt[3]{359-12\sqrt{78}}+\sqrt[3]{359+12\sqrt{78}}}{6}$

**Thí dụ 10 Giải phơıong trình**

$$\frac{(x+1)\sqrt{3x+1}+\sqrt{x^3+4x^2+x-2}}{2x^2+x+3}=1$$

**Hơńg dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+x+2-(x+1)\sqrt{3x+1}$ **và** $x^2+1-\sqrt{x^3+4x^2+x-2}$

PT đã cho có 2 nghiệm: $x=1$; $x=\dfrac{\sqrt[3]{27-\sqrt{633}}+\sqrt[3]{27+\sqrt{633}}}{\sqrt[3]{18}}$

**Thí dụ 11 Giải phơıong trình**

$$\frac{(x+2)\sqrt{3x+1}+\sqrt{-x^3+4x^2+10x-4}}{4x^2+x+4}=1$$

**Hơńg dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2+x+3-(x+2)\sqrt{3x+1}$ **và** $2x^2+1-\sqrt{-x^3+4x^2+10x-4}$

PT đã cho có 2 nghiệm: $x=1$ **;** $x=\dfrac{-5+\sqrt[3]{5(281+18\sqrt{249})}-\sqrt[3]{5(281-18\sqrt{249})}}{12}$

**Thí dụ 12 Giải hệ phơơng trình**

$$\begin{cases} x^2+2y^2=xy^2+4 \\ (x+2)\sqrt{3x^2+4}+3\sqrt{4x^3+2x^2+8x+8}=9x^2+y^2 \end{cases}$$

**Hơớng dẫn.**

**Phơơng trình thứ nhất của hệ tơơng đơơng với** $x=2$ **hoặc** $x=y^2-2\ge -2$

**Với x=2 các bạn tự xử lí trơờng hợp dễ này**

**Với** $x=y^2-2\ge -2$ **thay vào PT thứ 2 của hệ ta đơợc**

$$(x+2)\sqrt{3x^2+4}+3\sqrt{4x^3+2x^2+8x+8}=9x^2+x+2(*)$$

**Biểu thức cần tìm là** $3x^2+x+2-(x+2)\sqrt{3x^2+4}$ **và** $2x^2-\sqrt{4x^3+2x^2+8x+8}$

PT(*) có 2 nghiệm: $x=2$ **;** $x=\dfrac{-1+\sqrt[3]{\dfrac{3\sqrt{183}-31}{4}}-\sqrt[3]{\dfrac{3\sqrt{183}+31}{4}}}{3}$

**Đến đây các bạn tự giải tiếp**

**Thí dụ 13 Giải hệ phơơng trình**

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{2-y^2}{\sqrt{y^4-2y^2+2}}=0 \\ y^2\sqrt{3x^2+13}+\sqrt{2x^2+16x+41}=3x^2+3y^2+5 \end{cases}$$

**Hơớng dẫn.**

**Sử dụng Hàm đặc trơng có**

**Phơơng trình thứ nhất của hệ tơơng đơơng** $x=y^2-2\ge -2$

**Với** $x=y^2-2\geq -2$ **thay vào PT thứ 2 của hệ ta đựợc**

$(x+2)\sqrt{3x^2+13}+\sqrt{2x^2+16x+41}=3x^2+3x+11(*)$

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2+3x+6-(x+2)\sqrt{3x^2+13}$ **và** $x^2+5-\sqrt{2x^2+16x+41}$

PT(*) có 2 nghiệm: $x=2$; $x=\dfrac{-2+2\sqrt[3]{3\sqrt{57}-1}-2\sqrt[3]{3\sqrt{57}+1}}{3}$

**Đến đây các bạn tự giải tiếp**

**Thí dụ 14 Giải hệ phọng trình**

$$\begin{cases} x^2-xy^2+x-y^2+2=0 \\ y^2\sqrt{3x^2+13}+\sqrt{4x^2+10x+67}=3x^2+3x+15 \end{cases}$$

**Hợng dẫn.**

**Phọng trình thứ nhất của hệ tợng đọng với** $x=1$ **hoặc** $x=y^2-2\geq -2$

**Với x=1 các bạn tự xử lí trọờng hợp dễ này**

**Với** $x=y^2-2\geq -2$ **thay vào PT thứ 2 của hệ ta đựợc**

$(x+2)\sqrt{3x^2+13}+\sqrt{4x^2+10x+67}=3x^2+3x+15(*)$

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2+3x+7-(x+2)\sqrt{3x^2+13}$ **và** $x^2+8-\sqrt{4x^2+10x+67}$

PT(*) có 2 nghiệm: $x=1$; $x=\dfrac{-1+\sqrt[3]{17+9\sqrt{681}}-\sqrt[3]{17-9\sqrt{681}}}{3}$

**Đến đây các bạn tự giải tiếp**

## Sử dụng lí thuyết của 2 chuyên đề dợới đây có thể tìm ra các biểu thức cần xuất hiện

Vũ Hồng Phong GVTHPT Tiên Du 1,Tiên Du, Bắc Ninh (21-4-2016)

Chuyên đề 1

**PHƯƠNG PHÁP THẾ TRONG THỦ THUẬT SỬ DỤNG MÁY TÍNH ĐỂ TÌM NHÂN TỬ CHUNG HOẶC TÌM BIỂU THỨC TRONG NHÂN LIÊN HỢP KHI GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ**

**Một kĩ năng rất hữu ích có thể giúp ta giải được một phương trình vô tỉ là kĩ năng tìm nhân tử chung hoặc tìm biểu thức trong nhân liên hợp. Đôi khi việc tìm ra các biểu thức đó là rất khó khăn nếu ta không có máy tính cầm tay trợ giúp. Bài viết này xin được giới thiệu kĩ thuật dùng máy tính cầm tay tìm nhân tử chung hoặc biểu thức để ta xử lí nhân liên hợp có dạng** $ax^2+bx+c-\sqrt[k]{P(x)}$ **,với a,b,c là các số nguyên. Sau đây là các thí dụ**

**Thí dụ 1 Giải phương trình**

$$\frac{x^6-3x^4+3x^3+6x-10}{4x^2+1+2\sqrt{x^2-3x+6}}=2$$

**Lời giải**

**Phương trình(PT) đã cho tương đương với PT:**

$$x^6-3x^4+3x^3-8x^2+6x-12-4\sqrt{x^2-3x+6}=0(1)$$

**Ta tìm nghiệm của PT(1) bằng máy tính CASIO fx-570VN PLUS như sau:**

**Nhập biểu thức vế trái(VT) của PT(1) rồi bấm SHIFT SOLVE**

**Máy hỏi Solve for X ta bấm 10 = máy cho ta nghiệm X=2**

**Ấn nút sang trái để quay lại PT(1)**

**Sửa biểu thức thành VT(1):( X-2) rồi bấm SHIFT SOLVE**

**Máy hỏi Solve for X ta bấm** $-10$ **=, máy cho ta nghiệm** $X=-2,546818277$

**Bấm SHIFT STO A (lưu nghiệm vừa tìm vào A)**

**Giả sử nhân tử của PT(1) có dạng** $ax^2+bx+c-\sqrt{x^2-3x+6}$

**chứa 2 nghiệm vừa tìm.**

**Nghiệm X=2 suy ra** $4a+2b+c-2=0 \Rightarrow c=-4a-2b+2$

**Nhân tử của PT(1) trở thành:** $ax^2+bx-4a-2b+2-\sqrt{x^2-3x+6}$

$=a(x-2)(x+2)+b(x-2)+2-\sqrt{x^2-3x+6}$

**Xét** $a(x-2)(x+2)+b(x-2)+2-\sqrt{x^2-3x+6}=0$

**suy ra** $b=\dfrac{\sqrt{x^2-3x+6}-2}{x-2}-a(x+2)$ **(2)**

Vì A là nghiệm của PT(2) nên

ta tìm a,b là số nguyên bằng cách bấm máy tính nhoı sau:

**MODE 7 máy hiện f(X)= ,ta nhập** $\dfrac{\sqrt{A^2-3A+6}-2}{A-2}-(A+2)X$ **bấm =**

**Máy hiện Start? Ta bấm** $-9$ **=**

**Máy hiện End? Ta bấm 9 =**

**Máy hiện Step? Ta bấm 1 =**

**Quan sát bảng ta thấy khi X=1=a thì F(X)=0=b là số nguyên**

**Nhoı vậy a=1,b=0,c=**$-2$

**Nên nhân tử cần tìm là** $x^2-2-\sqrt{x^2-3x+6}$

**Suy ra PT xuất hiện** $4(x^2-2-\sqrt{x^2-3x+6})$

**Biểu thức còn lại là** $x^6-3x^4+3x^3-12x^2+6x-4$

**Biểu thức này chứa nhân tử cần tìm nên nó chứa nhân tử sau:**

$(x^2-2)^2-(x^2-3x+6)=x^4-5x^2+3x-2$

**Thật vậy,sử dụng kĩ năng chia đa thức ta đoợc**

$x^6-3x^4+3x^3-12x^2+6x-4=(x^4-5x^2+3x-2)(x^2+2)$

**Do đó**

$PT(1)\Leftrightarrow(x^4-5x^2+3x-2)(x^2+2)+4(x^2-2-\sqrt{x^2-3x+6})=0$

$\Leftrightarrow(x^2-2-\sqrt{x^2-3x+6})(x^2-2+\sqrt{x^2-3x+6})(x^2+2)+4(x^2-2-\sqrt{x^2-3x+6})=0$

$\Leftrightarrow (x^2-2-\sqrt{x^2-3x+6})\left(x^4+(x^2+2)\sqrt{x^2-3x+6}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2-3x+6}=x^2-2(3)\\ x^4+(x^2+2)\sqrt{x^2-3x+6}=0(4)\end{array}\right.$

Dễ thấy PT(4) vô nghiệm

$PT(3)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2\geq 0\\ x^2-3x+6=x^4-4x^2+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2\geq 0\\ (x-2)(x^3+2x^2-x+1)=0\end{cases}$

Giải tiếp ta đợc nghiệm $x=2$ và $x=\dfrac{-2-\sqrt[3]{\dfrac{61+9\sqrt{29}}{2}}-\sqrt[3]{\dfrac{61-9\sqrt{29}}{2}}}{3}$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm: $x=2$ ; $x=\dfrac{-2-\sqrt[3]{\dfrac{61+9\sqrt{29}}{2}}-\sqrt[3]{\dfrac{61-9\sqrt{29}}{2}}}{3}$

**Thí dụ 2 Giải phơng trình**

$\dfrac{2x^4+x^3+2x^2+6x}{3+(x^2+2)\sqrt{8x^3+9x^2+3}}=1$

**Lời giải**

**Phơng trình đã cho tơng đơng với PT:**

$2x^4+x^3+2x^2+6x-3-(x^2+2)\sqrt{8x^3+9x^2+3}=0(1)$

**Nhập biểu thức vế trái của PT(1) rồi bấm SHIFT SOLVE**

**Máy hỏi Solve for X ta bấm 10 = máy cho ta nghiệm** $X=2{,}25992105$

**Bấm SHIFT STO A**

**Nhập biểu thức** $VT(1):(X-A)^4$ **rồi bấm SHIFT SOLVE**

**Máy hỏi Solve for X ta bấm 0 = , chờ gần 6 phút máy hiện Can't Solve**

Khi này ta sẽ chuyển sang hớng tìm nghiệm ngoại lai (nếu có)của PT bằng cách đổi dấu trớc căn PT đã cho.Dẫn tới tìm nghiệm của PT sau:

$2x^4+x^3+2x^2+6x-3+(x^2+2)\sqrt{8x^3+9x^2+3}=0(2)$

Ta tìm nghiệm "đẹp" (nếu có) của PT(2) nhơı sau:

Bấm **MODE 7** máy hiện f(X)=

Ta nhập biểu thức vế trái PT(2) bấm =

**Máy hiện Start? Ta bấm -9 =**

**Máy hiện End? Ta bấm 9 =**

**Máy hiện Step? Ta bấm 1 =**

**Khi này xem bảng ta thấy** $X=-1$ **thì F(X)=0**

**Vậy nghiệm ngoại lai cần tìm là x= -1**

**Giả sử nhân tử của PT(1) có dạng** $ax^2+bx+c-\sqrt{8x^3+9x^2+3}$

**Vì x= -1 nghiệm ngoại lai nên nó là nghiệm PT:** $ax^2+bx+c+\sqrt{8x^3+9x^2+3}=0$

**suy ra** $a-b+c+2=0\Rightarrow c=-a+b-2$

**Nhân tử của PT(*) trở thành:** $ax^2+bx-a+b-2-\sqrt{8x^3+9x^2+3}$
$=a(x-1)(x+1)+b(x+1)-2-\sqrt{8x^3+9x^2+3}$

**Xét** $a(x-1)(x+1)+b(x+1)-2-\sqrt{8x^3+9x^2+3}=0$

**suy ra** $b=\dfrac{\sqrt{8x^3+9x^2+3}+2}{x+1}-a(x-1)\in Z$

Ta tìm a,b bằng cách bấm máy tính nhơı sau:

**MODE 7 máy hiện f(X)= ,ta nhập** $\dfrac{\sqrt{8A^3+9A^2+3}+2}{A+1}-(A-1)X$ **bấm =**

**Máy hiện Start? Ta bấm -9 =**

**Máy hiện End? Ta bấm 9 =**

**Máy hiện Step? Ta bấm 1 =**

**Quan sát bảng ta thấy khi X=1 thì F(X)=3 là số nguyên**

**Nhơı vậy a=1,b=3,c=0.**Ta đơợc nhân tử là $x^2+3x-\sqrt{8x^3+9x^2+3}$

Mà $(x^2+3x)^2-(8x^3+9x^2+3)=x^4-2x^3-3$

**PT(1) trở thành:** $x^4-2x^3-3+(x^2+2)(x^2+3x-\sqrt{8x^3+9x^2-6})=0$

$\Leftrightarrow (x^2+3x-\sqrt{8x^3+9x^2-6})(2x^2+3x+2+\sqrt{8x^3+9x^2+3})=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{8x^3+9x^2+3}=x^2+3x(3)\\ 2(x+\frac{3}{4})^2+\frac{7}{8}+\sqrt{x^2-3x+6}=0(4)\end{array}\right.$$

Dễ thấy PT(4) vô nghiệm

$$PT(3)\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+3x\ge 0\\ (x+1)\left((x-1)^3-2\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1+\sqrt[3]{2}\,.$$

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất $x=1+\sqrt[3]{2}$

**Thí dụ 3 Giải phọợng trình**

$$\frac{2\sqrt{5x^2-3x+2}-x}{1+\sqrt{36x^4-44x^3+17x^2-x-4}}=1$$

**Lời giải**

**Phọợng trình đã cho tợng đọợng với PT:**

$2\sqrt{5x^2-3x+2}-\sqrt{36x^4-44x^3+17x^2-x-4}-x-1=0(1)$

Ta tìm nghiệm "đẹp" (nếu có) của PT(1) nhọ sau:

**Bấm MODE 7** máy hiện f(X)=

Ta nhập biểu thức vế trái PT(1) bấm =

**Máy hiện Start? Ta bấm -9 =**

**Máy hiện End? Ta bấm 9 =**

**Máy hiện Step? Ta bấm 1 =**

**Khi này ta thấy X=1 thì F(X)=0**

**Nhập biểu thức VT(1):( X-1) rồi bấm SHIFT SOLVE**

**Máy hỏi X=? ta bấm** $0$ **=, máy cho ta nghiệm** $X=-0{,}629960524$

Làm tương tự các thí dụ trên ta được: $b=\dfrac{\sqrt{5x^2-3x+2}-2}{x-1}-a(x+1)$ **và**

$$b=\dfrac{\sqrt{36x^4-44x^3+17x^2-x-4}-2}{x-1}-a(x+1)$$

**Nên** $\sqrt{5x^2-3x+2}-(2x^2-x+1)$ **và** $4x^2-3x+1-\sqrt{36x^4-44x^3+17x^2-x-4}$

**là các biểu thức cần xuất hiện trong phương trình**

PT(1) trở thành: $2(\sqrt{5x^2-3x+2}-2x^2+x-1)+(4x^2-3x+1-\sqrt{36x^4-44x^3+17x^2-x-4})=0$

$$\Leftrightarrow 2\times\dfrac{5x^2-3x+2-\left(2x^2-x+1\right)^2}{\sqrt{5x^2-3x+2}+2x^2-x+1}+\dfrac{\left(4x^2-3x+1\right)^2-36x^4+44x^3-17x^2+x+4}{4x^2-3x+1+\sqrt{36x^4-44x^3+17x^2-x-4}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(4x^4-4x^3+x-1\right)\left[\dfrac{-2}{\sqrt{5x^2-3x+2}+2x^2-x+1}+\dfrac{-5}{4x^2-3x+1+\sqrt{36x^4-44x^3+17x^2-x-4}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow 4x^4-4x^3+x-1=0\Leftrightarrow (x-1)(4x^3+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}\end{array}\right.$$

Kiểm tra điều kiện xác định thấy các nghiệm thỏa mãn.

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm $x=1;\ x=-\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$

**Thí dụ 4 Giải phương trình**

$$\dfrac{x^4-2x^3+14-\sqrt{4x^3+7x^2-2x-3}}{x^2-5x+8+\sqrt{x^4+6x^3+16x^2-12x-11}}=1$$

**Lời giải**

**Phương trình đã cho tương đương với PT:**

$$\sqrt{4x^3+7x^2-2x-3}+\sqrt{x^4+6x^3+16x^2-12x-11}-x^4+2x^3+x^2-5x-6=0(1)$$

Bấm máy tính như các thí dụ trên để tìm nghiệm nguyên ta thấy không có

Tìm và lưu các nghiệm ta được ít nhất 3 nghiệm là

$A = 2,732050808$ ; $B = 1,414213562$ ; $C = -0,732050807$

**Chú ý: Nếu máy hiện Continue:[=] thì ta bấm = ,đợi một lúc ta được nghiệm**

**Giả sử biểu thức thứ nhất có dạng** $ax^2 + bx + c - \sqrt{4x^3 + 7x^2 - 2x - 3}$

Do A,B,C là nghiệm của biểu thức nên ta có

$aA^2 + bA + c = \sqrt{4A^3 + 7A^2 - 2A - 3}$

$aB^2 + bB + c = \sqrt{4B^3 + 7B^2 - 2B - 3}$

$aC^2 + bC + c = \sqrt{4C^3 + 7C^2 - 2C - 3}$

**Bấm MODE 5 rồi bấm 2 để giải hệ 3 ẩn a,b,c gồm 3 PT trên.Ta được a=1;b=1;c=1**

**Như vậy biểu thức thứ nhất cần tìm là** $x^2 + x + 1 - \sqrt{4x^3 + 7x^2 - 2x - 3}$

**Tương tự biểu thức thứ hai cần tìm là** $2x^2 + 1 - \sqrt{x^4 + 6x^3 + 16x^2 - 12x - 11}$

$$PT(1) \Leftrightarrow x^2 + x + 1 - \sqrt{4x^3 + 7x^2 - 2x - 3}$$
$$+ 2x^2 + 1 - \sqrt{x^4 + 6x^3 + 16x^2 - 12x - 11} + x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4 = 0$$

$\Leftrightarrow (x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4)P(x) = 0(2)$ **với**

$$P(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1 + \sqrt{4x^3 + 7x^2 - 2x - 3}} + \frac{3}{2x^2 + 1 + \sqrt{x^4 + 6x^3 + 16x^2 - 12x - 11}} + 1 > 0$$

**Suy ra** $PT(2) \Leftrightarrow x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x - 2)(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \pm \sqrt{3} \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$

Kiểm tra điều kiện xác định thấy các nghiệm thỏa mãn

**Vậy PT đã cho có 4 nghiệm** $x = 1 \pm \sqrt{3}$ **;** $x = \pm\sqrt{2}$

**Chú ý: Do** $A + C = 2$ **;** $AC = -2$ **nên PT có nhân tử là** $x^2 - 2x - 2$

**Mở rộng dạng toán: Nếu a,b,c hoặc nghiệm PT là các số hữu tỉ thì ta đưa về tìm các biểu thức dạng** $n\sqrt[k]{P(x)} - (px^2 + qx + r)$ **,với p,q,r là số nguyên và n là số nguyên dương ta tìm được hoặc ta thử chọn. Vấn đề nữa đặt ra là liệu có phương trình mà ta phải tìm biểu thức dạng phức tạp hơn chẳng hạn như** $\sqrt[k]{P(x)} - (ax^3 + bx^2 + cx + d)$ **.Hãy làm bài tập dưới đây các bạn sẽ rõ**

**Bài tập** Giải phương trình

1) $\dfrac{4x^4-13x^2+2x}{2+\sqrt{4x^3+16x^2-x+2}}=1$

2) $\dfrac{x^4-7x^3-3-3\sqrt{x^3+9x^2-6}}{x^2-3x+3}=-3$

3) $\dfrac{2x^4-x^3+3x^2-5x-8}{(x^2-x+1)\sqrt{4x^2+3x+14}}=1$

4) $\dfrac{\sqrt{3x^4-2x^3+4x^2+4}+\sqrt{3x^2+2x+4}}{3x^2+x+2}=1$

5) $\dfrac{3\sqrt{16x^4-12x^3+4x^2+24x-23}-2x}{2\sqrt{3x^4+7x^2-14x+13}+1}=1$

6) $\dfrac{2x+2+\sqrt[3]{8x^6-12x^5+4x^4+1}}{1+\sqrt{12x^4+5x^2+2x-3}}=1$

7) $\dfrac{3-2x+\sqrt[3]{x^6+3x^5+5x-1}}{2+\sqrt{4x^4-x^3+3x^2-7x+2}}=1$

8) $\dfrac{x^4-2x^3+6-\sqrt{4x^3+27x^2+6x+3}}{20x^2+x+1+\sqrt{2x^3+26x^2+2x+3}}=1$

9) $\dfrac{2x^3-4x^2+6x+\sqrt{x^4+10x^2-4x-3}}{3+(x^2+2)\sqrt[3]{2x^4+5x^3-12x^2+6x}}=1$

10) $\dfrac{18x^2+12-3\sqrt{20x^3+9x^2+30x-20}}{x^2-\dfrac{5}{2}x+4+\sqrt{7x^3+3x^2+8x-5}}=2$

11) $\dfrac{(x^3-2x)\sqrt{5x^5+7x^4+4x^3-4x^2-3x+7}}{3x^5+x^4-x^3-8x^2-5x+6}=1$

12) $\dfrac{7x^3+8x+\sqrt{3x^4+21x^3-15x^2+27x-5}}{2x^4+14x^2+6-\sqrt{2x^4+11x^3-4x^2+11x-2}}=1$

13) $\dfrac{\sqrt{(28x^2+29x+11)\sqrt{x}-43x^2-4x-5}-4x\sqrt{x}}{4x+1-\sqrt{(36x^2+25x+11)\sqrt{x}-35x^2-6x-6}}=1$

14) $\sqrt{21x^6+19x^5-13x^4-9x^3+5x^2-4x-3}=$
$4x^8+4x^7-20x^6-19x^5+19x^4+12x^3-5x^2+4x+5$

# Chuyên đề 2

## PHƠ]ƠNG PHÁP CỘNG DÙNG TRONG THỦ THUẬT MÁY TÍNH CẦM TAY TRỢ GIÚP GIẢI PHƠ]ƠNG TRÌNH VÔ TỈ

**Điều kiện sử dụng phơpng pháp: Bấm máy tính tìm đơpc ít nhất 2 nghiệm A,B phân biệt**

**Nếu PT có chứa $\sqrt{P(x)}$ thì giả sử biểu thức cần xuất hiện có dạng: $ax^2+bx+c-\sqrt{P(x)}$ ,trong đó a,b,c là các số nguyên .Do A,B là nghiệm của biểu thức nên**

$aA^2+bA+c-\sqrt{P(A)}=0(*)$

$aB^2+bB+c-\sqrt{P(B)}=0$

**Chú ý: Nếu B là nghiệm ngoại lai ta có $aB^2+bB+c+\sqrt{P(B)}=0$ (các bạn tự xử lí TH này)**

**Trừ vế với vế ta đơpc:**

$a(A-B)(A+B)+b(A-B)=\sqrt{P(A)}-\sqrt{P(B)}$

**Suy ra** $b=\dfrac{\sqrt{P(A)}-\sqrt{P(B)}}{A-B}-(A+B)a$

**Trơìng hợp 1:** $A+B=0$ **thì** $b=\dfrac{\sqrt{P(A)}-\sqrt{P(B)}}{A-B}$

**Nhập biểu thức** $\dfrac{\sqrt{P(A)}-\sqrt{P(B)}}{A-B}$ **bấm = máy hiện giá trị của b cần tìm**

**Từ (*) suy ra** $c=\sqrt{P(A)}-aA^2-bA$

**Ta tìm a,c bằng máy tính nhơı sau:**

**Bấm MODE 7 máy hiện f(X)= ta nhập** $\sqrt{P(A)}-XA^2-bA$ **bấm =**

**Máy hiện Start? Ta bấm** $-9$ **=**

**Máy hiện End? Ta bấm 9 =**

**Máy hiện Step? Ta bấm 1 =**

**Quan sát bảng ta chỉ lấy X làm F(X) nhận giá trị nguyên**

**Suy ra a=X,c=F(X)**

**Trơıòng hợp 2:** $A+B\neq 0$

**Do** $b=\dfrac{\sqrt{P(A)}-\sqrt{P(B)}}{A-B}-(A+B)a$ **nên ta tìm a,b bằng máy tính nhơı sau**

**Bấm MODE 7 máy hiện f(X)= ta nhập biểu thức** $\dfrac{\sqrt{P(A)}-\sqrt{P(B)}}{A-B}-(A+B)X$ **bấm =**

**Máy hiện Start? Ta bấm** $-9$ **=**

**Máy hiện End? Ta bấm 9 =**

**Máy hiện Step? Ta bấm 1 =**

**Quan sát bảng ta lấy X làm F(X) nhận giá trị nguyên**

**Từ đó suy ra a=X,b=F(X)**

**Từ PT(*) ta tìm** $c=\sqrt{P(A)}-aA^2-bA$

**Nhập biểu thức** $\sqrt{P(A)}-aA^2-bA$ **bấm = máy hiện giá trị của c cần tìm**

**Sau đây là các thí dụ.**

**Thí dụ 1 Giải phơıong trình**

$$\frac{x^6+\sqrt{x^6+6x^4-6x^3-2x^2-2x-8}}{3x^4+12x^2-x+10}=1$$

**Lời giải**

**Phượng trình đã cho tượng đượng với PT:**

$\sqrt{P(x)}+x^6-3x^4-12x^2+x-10=0(1)$

**Với** $\sqrt{P(x)}=\sqrt{x^6+6x^4-6x^3-2x^2-2x-8}$

**Nhập biểu thức vế trái(VT) của PT(1) rồi bấm SHIFT SOLVE**

**Máy hỏi Solve for X ta bấm 10 = máy cho ta nghiệm** $X=2,25992105$

**Bấm nút mũi tên sang trái để quay lại VT(1) ta bấm = để lưu VT(1)**

**Bấm ALPHA X SHIFT STO A để lưu nghiệm vào A**

**Bấm nút mũi tên đi lên để về VT(1) rồi bấm SHIFT SOLVE**

**Máy hỏi Solve for X ta bấm -10 = máy cho ta nghiệm** $X=-2,25992105$

**Bấm SHIFT STO B**

**Bấm máy A+B máy hiện 0 suy ra** $b=\dfrac{\sqrt{P(A)}-\sqrt{P(B)}}{A-B}$

**Nhập biểu thức** $\dfrac{\sqrt{P(A)}-\sqrt{P(B)}}{A-B}$ **bấm = máy hiện -1. Vậy b=-1**

**Do b= -1 nên** $c=\sqrt{P(A)}-aA^2-(-1)A=\sqrt{P(A)}-aA^2+A$

**Bấm MODE 7 máy hiện f(X)= ta nhập** $\sqrt{P(A)}-A^2X+A$ **bấm =**

**Máy hiện Start? Ta bấm** $-9$ **=**

**Máy hiện End? Ta bấm 9 =**

**Máy hiện Step? Ta bấm 1 =**

**Quan sát bảng ta thấy khi X=3 thì F(X)=1 nguyên**

**Suy ra a=3,c=1**

**Biểu thức cần tìm là:** $\sqrt{x^6+6x^4-6x^3-2x^2-2x-8}-(3x^2-x+1)$

**PT(1) trở thành** $\sqrt{P(x)}-(3x^2-x+1)+x^6-3x^4-9x^2-9=0$

$$\Leftrightarrow \frac{P(x)-(3x^2-x+1)^2}{\sqrt{P(x)}+3x^2-x+1}+x^6-3x^4-9x^2-9=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^6-3x^4-9x^2-9}{\sqrt{P(x)}+3x^2-x+1}+x^6-3x^4-9x^2-9=0$$

$$\Leftrightarrow [\frac{1}{\sqrt{P(x)}+3x^2-x+1}+1](x^6-3x^4-9x^2-9)=0$$

$$\Leftrightarrow x^6-3x^4-9x^2-9=0$$

$$\Leftrightarrow (x^3+3x)^2-(3x^2+3)^2=0 \Leftrightarrow (x^3+3x^2+3x+3)(x^3-3x^2+3x-3)=0$$

$$\Leftrightarrow \left((x+1)^3+2\right)\left((x-1)^3-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x+1)^3=-2\\(x-1)^3=2\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm(1+\sqrt[3]{2})$$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm $x=\pm(1+\sqrt[3]{2})$

**Thí dụ 2 Giải phương trình**

$$\frac{4x^2-x+4-\sqrt{2x^6+4x^4+7x^3+5x^2+2x-1}}{x^2+\sqrt{2x^6+x^4-x^3+10x^2-12x+7}}=1$$

**Lời giải**

**Phương trình đã cho tương đương với PT:**

$\sqrt{P(x)}+\sqrt{Q(x)}=3x^2-x+4(1)$

**Với** $\sqrt{P(x)}=\sqrt{2x^6+x^4-x^3+10x^2-12x+7}$

$\sqrt{Q(x)}=\sqrt{2x^6+4x^4+7x^3+5x^2+2x-1}$

Tìm và lưu các nghiệm như thí dụ 1 ta được 2 nghiệm là

$A=0{,}793700526$ ; $B=-1{,}25992105$

**Ta có** $A+B=-0{,}4662205239\neq 0$

**Có** $b=\frac{\sqrt{P(A)}-\sqrt{P(B)}}{A-B}-(A+B)a$ **nên ta tìm a,b như sau**

**Bấm MODE 7 máy hiện f(X)= ta nhập** $\frac{\sqrt{P(A)}-\sqrt{P(B)}}{A-B}-(A+B)X$ **bấm =**

**Máy hiện Start? Ta bấm** $-9$ **=**

**Máy hiện End? Ta bấm 9 =**

**Máy hiện Step? Ta bấm 1 =**

**Quan sát bảng ta thấy F(X)=-2 khi X=1**

**Suy ra a=1,b= -2. Khi này** $c=\sqrt{P(A)}-A^2+2A$

**Nhập biểu thức** $\sqrt{P(A)}-A^2+2A$ **bấm = máy hiện số 3**

**Ta đoợc c=3**

**Biểu thức cần tìm là** $\sqrt{P(x)}-(x^2-2x+3)$

**Toọng tự biểu thức nữa cần tìm là** $\sqrt{Q(x)}-(2x^2+x+1)$

**PT(1) trở thành** $\sqrt{P(x)}-(x^2-2x+3)+\sqrt{Q(x)}-(2x^2+x+1)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{P(x)-(x^2-2x+3)^2}{\sqrt{P(x)}+x^2-2x+3}+\frac{Q(x)-(2x^2+x+1)^2}{\sqrt{Q(x)}+2x^2+x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^6+3x^3-2}{\sqrt{P(x)}+x^2-2x+3}+\frac{2x^6+3x^3-2}{\sqrt{Q(x)}+2x^2+x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^3+2)(2x^3-1)[\frac{1}{\sqrt{P(x)}+x^2-2x+3}+\frac{1}{\sqrt{Q(x)}+2x^2+x+1}]=0$$

$$\Leftrightarrow (x^3+2)(2x^3-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt[3]{2} \\ x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \end{array}\right.$$

**Vậy phoọng trình có 2 nghiệm** $x=-\sqrt[3]{2}$ **;** $x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

**Vấn đề đặt ra là liệu với một biểu thức** $\sqrt{P(x)}$ **có khi nào có nhiều lựa chọn biểu thức**

**dạng** $ax^2+bx+c-\sqrt{P(x)}$ **hay không.Ví dụ sau sẽ làm sáng tỏ điều này**

**Thí dụ 3 Giải phọong trình**

$$\frac{x^4-2x^3+x^2-2x-3}{\sqrt{12x^3+24x^2+4x+6}+\sqrt{12x^3+51x^2+6}}=1$$

**Lời giải**

**Phọong trình đã cho tọong đọong với PT:**

$x^4-2x^3+x^2-2x-3-\sqrt{P(x)}-\sqrt{Q(x)}=0(1)$

**Với** $\sqrt{P(x)}=\sqrt{12x^3+24x^2+4x+6}$ **và** $\sqrt{Q(x)}=\sqrt{12x^3+51x^2+6}$

**Tìm và lọu các nghiệm ta đọợc 2 nghiệm là**

$A=3,449489743$ ; $B=-1,449489743$

**Bấm máy tính có** $A+B=2\neq 0$ **;** $AB=-5$

**(Theo Định lí Vi-ét thì PT sẽ có nhân tử là** $x^2-2x-5$**)**

**Có** $b=\dfrac{\sqrt{P(A)}-\sqrt{P(B)}}{A-B}-(A+B)a$ **nên ta tìm a,b nhọ sau:**

**Bấm MODE 7 máy hiện f(X)= ta nhập biểu thức** $\dfrac{\sqrt{P(A)}-\sqrt{P(B)}}{A-B}-(A+B)X$ **bấm =**

**Máy hiện Start? Ta bấm** $-9$ **=**

**Máy hiện End? Ta bấm 9 =**

**Máy hiện Step? Ta bấm 1 =**

**Quan sát bảng ta thấy tất cả các giá trị F(X) đều nguyên. Vì thế ta chọn 1 cặp là**

**X=2;F(X)= 1. Suy ra a=2,b=1** $\Rightarrow c=\sqrt{P(A)}-2A^2-A$

**Nhập biểu thức** $\sqrt{P(A)}-2A^2-A$ **bấm = máy hiện số 1.Ta đọợc c=1**

**Suy ra** $2x^2+x+1-\sqrt{P(x)}$ **là biểu thức cần tìm**

**Tọong tự ta chọn đọợc** $3x^2-x+1-\sqrt{Q(x)}$ **là biểu thức cần tìm**

**Phƣơng trình(1) tƣơng đƣơng với PT:**

$$2x^2+x+1-\sqrt{P(x)}+3x^2-x+1-\sqrt{Q(x)}+x^4-2x^3-4x^2-2x-5=0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+x+1-\sqrt{P(x)}+3x^2-x+1-\sqrt{Q(x)}+(x^2-2x-5)(x^2+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2x-5)\left(\frac{4x^2+1}{2x^2+x+1+\sqrt{P(x)}}+\frac{9x^2+1}{3x^2-x+1+\sqrt{Q(x)}}+x^2+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-5=0 \Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{6}$$

**Vậy phƣơng trình có 2 nghiệm** $x=1\pm\sqrt{6}$

**Chọn cặp biểu thức khác chẳng hạn** $x^2+3x+6-\sqrt{P(x)}$ **;** $3x^2-x+1-\sqrt{Q(x)}$ **ta cũng giải đƣợc PT theo cách nhân liên hợp**

**Chú ý:**

**+Việc chọn biểu thức trong thí dụ 3 là tùy ý hay cần chọn hợp lí để ta dùng đƣợc cách nhân liên hợp. Xin dành cho mọi ngƣời tìm hiểu điều này.**

**+ Một số phƣơng trình ta có thể tìm biểu thức phức tạp hơn chẳng hạn** $\sqrt{P(x)}-(ax^3+bx^2+cx+d)$ **và có thể giải quyết theo cách bài viết đã nêu khi điều kiện về nghiệm của PT ta tìm đƣợc nhiều hơn(kể cả nghiệm ngoại lai hay nghiệm bội)**

**Bài tập Giải phƣơng trình**

1) $\dfrac{3x^3+\sqrt{24x^3+4x^2+9x-1}}{x^4+8x^2-9x+9}=1$

2) $\dfrac{9x^6+9x^3+5x^2-5}{x^2+\sqrt{9x^6+x^4+12x^3+7x^2-4}}=3x^3$

3) $\dfrac{4x^3+4x+\sqrt{18x^3+4x^2+12x+2}}{3x^4+10x^2+4-\sqrt{6x^3-2x^2+6x-1}}=1$

4) $\dfrac{4x^4+7x^2-3-\sqrt{6x^3+16x^2+9x+6}}{x^2-5x+20+\sqrt{16x^3+49x^2+26x+21}}=1$

5) $\dfrac{4x^2-x+5-\sqrt{x^6-4x^3+6x^2-12x+5}}{x^2+1+\sqrt{4x^6+4x^3-11x^2+2x-15}}=1$

6) $\dfrac{4x^2-3x+3-\sqrt{x^6+x^4+8x^2-8x-17}}{x^2+\sqrt{x^6+4x^4+5x^2-2x-20}}=1$

7) $\dfrac{2x^6+8x^4-4x^2+x-14}{1+\sqrt{4x^6+7x^4-2x^3-3x^2-2x-8}}=-1$

8) $\dfrac{3x^2-3x+4-\sqrt{x^6+x^4+8x^2-8x+8}}{`1+\sqrt{x^6+4x^4+5x^2-2x+5}}=1$

9) $\dfrac{x^6-3x^5+24x^4+2x^2-8x+2}{5+\sqrt{x^6+33x^4-4x^3+8x^2-8x+3}}=x^3$

10) $\dfrac{3x^2+3x+6-\sqrt{x^8+4x^5+x^4+12x^2+16x}}{1+\sqrt{x^8+4x^5+4x^4+5x^2+2x-15}}=1$

11) $\dfrac{x^7+2x^5-6x^4+18x^3+4x-16}{\sqrt{x^7+4x^5-7x^4+18x^3+3x^2+2x-15}}=2x^3$

12) $\dfrac{-6x^7-15x^6-18x^5-9x^4+11x^2+x+1}{x^8+\sqrt{x^6+6x^5+19x^4+22x^3+14x^2+2x-8}}=1$

